

ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ: ΑΛΓΕΒΡΑ / Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 28 / 03 / 2026

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σελ. 90 σχολ.

A2. (i) $P = \frac{\gamma}{\alpha}$ **(ii)** $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$ **(iii)** $S_v = \frac{v}{2} [2\alpha_1 + (v-1)\omega]$ **(iv)** $\alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1}$

A3. (i) Σ **(ii)** Λ **(iii)** Σ **(iv)** Λ **(v)** Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Η διακρίνουσα του τριωνύμου $4x^2 + 7x - 2$ είναι $\Delta = 7^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2) = 49 + 32 = 81$.

Οι ρίζες του τριωνύμου $4x^2 + 7x - 2$, άρα και της εξίσωσης (1) είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 4} = \frac{-7 \pm 9}{8} = \begin{cases} \frac{-7+9}{8} = \frac{1}{4} \\ \frac{-7-9}{8} = -2 \end{cases}$$

B2. (i) Έχουμε $2x^2 - x > 3 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 > 0$. Η διακρίνουσα του τριωνύμου $2x^2 - x - 3$

είναι $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 1 + 24 = 25$. Οι ρίζες του τριωνύμου $2x^2 - x - 3$, είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm 5}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2} \\ \frac{1-5}{4} = -1 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	-1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$2x^2 - x - 3$	+	○	-	○	+

Συνεπώς $2x^2 - x - 3 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

(ii) Οι λύσεις της εξίσωσης (1) όπως βρήκαμε στο B1 είναι οι αριθμοί -2 και $\frac{1}{4}$.

Παρατηρούμε ότι $-2 \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$, αφού $-2 < -1$,

ενώ $\frac{1}{4} \notin (-\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$, αφού $-1 < \frac{1}{4} < \frac{3}{2}$. Άρα μόνο το -2 ανήκει στις λύσεις της ανίσωσης (2).

B3. Ισοδύναμα έχουμε: $2(2x^4 - 1) = -7x^2 \Leftrightarrow 4x^4 + 7x^2 - 2 = 0$.

Αν θέσουμε $x^2 = \omega$, τότε η εξίσωση γίνεται $4\omega^2 + 7\omega - 2 = 0$, που σύμφωνα με το B1 οι λύσεις της είναι $\omega = \frac{1}{4}$ και $\omega = -2$.

Όμως $\omega = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow |x| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ ή $x = \frac{1}{2}$, ενώ $\omega = -2 \Leftrightarrow x^2 = -2 < 0$, αδύνατη.

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί $x = -\frac{1}{2}$ και $x = \frac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θέτουμε $\omega = |1-x| = |x-1|$, άρα η εξίσωση γίνεται ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{3} - \frac{\omega+1}{4} &\leq 2 - \frac{\omega}{6} \Leftrightarrow 4\omega - 3(\omega+1) \leq 24 - 2\omega \Leftrightarrow 4\omega - 3\omega - 3 \leq 24 - 2\omega \\ \Leftrightarrow 4\omega - 3\omega + 2\omega &\leq 24 + 3 \Leftrightarrow 3\omega \leq 27 \Leftrightarrow \omega \leq 9 \Leftrightarrow |x-1| \leq 9 \Leftrightarrow -9 \leq x-1 \leq 9 \\ \Leftrightarrow -8 &\leq x \leq 10. \end{aligned}$$

Γ2. (i) Οι ρίζες του $x^2 - 9x$, είναι $x^2 - 9x = 0 \Leftrightarrow x(x-9) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 9$.

Το πρόσημο του $x^2 - 9x$ φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	0	9	$+\infty$
$x^2 - 9x$	+	○	○	+

Συνεπώς $x^2 - 9x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (9, +\infty)$.

(ii) Συναληθεύοντας τις λύσεις των δύο ανισώσεων, δηλαδή των

$x \in [-8, 10]$ και $x \in (-\infty, 0) \cup (9, +\infty)$, προκύπτει ότι το ζητούμενο σύνολο των x είναι όταν $x \in [-8, 0) \cup (9, 10]$.

Γ3. Αν ο α είναι μικρότερος ακέραιος αριθμός που ανήκει στις κοινές λύσεις των

ανισώσεων (1) και (2), δηλαδή στο σύνολο $[-8,0) \cup (9,10]$, τότε $\alpha = -8$.

Ομοίως ο γ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός που ανήκει στις λύσεις αυτές,

άρα $\gamma = 10$. Ο αριθμητικός μέσος των α και γ είναι ο $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{-8 + 10}{2} = 1$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για να έχει η εξίσωση (1) ρίζες πραγματικές και άνισες, θα πρέπει $\Delta > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Όμως είναι } \Delta &= [-4(1+\lambda)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4+3\lambda) = 16(1+\lambda)^2 - 16 - 12\lambda = \\ &= 16(1+2\lambda+\lambda^2) - 16 - 12\lambda = 16 + 32\lambda + 16\lambda^2 - 16 - 12\lambda = 16\lambda^2 + 20\lambda. \end{aligned}$$

Οι ρίζες του $16\lambda^2 + 20\lambda$ είναι $16\lambda^2 + 20\lambda = 0 \Leftrightarrow 4\lambda(4\lambda + 5) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = -\frac{5}{4}$,
οπότε αφού το πρόσημο του $16\lambda^2 + 20\lambda$ είναι αυτό που φαίνεται στον πίνακα:

x	$-\infty$	$-\frac{5}{4}$	0	$+\infty$
$16\lambda^2 + 20\lambda$	+	○	-	+

τότε θα είναι $\Delta > 0 \Leftrightarrow 16\lambda^2 + 20\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left(-\infty, -\frac{5}{4}\right) \cup (0, +\infty)$.

Δ2. (i) Είναι $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-4(1+\lambda)}{1} = 4(1+\lambda)$ και $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4+3\lambda}{1} = 4+3\lambda$.

(ii) Η παράσταση με την βοήθεια των όσων βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα, γίνεται: $A = (4x_1 - 3)(4x_2 - 3) = 16x_1x_2 - 12x_1 - 12x_2 + 9 = 16x_1x_2 - 12(x_1 + x_2) + 9 = 16 \cdot (4+3\lambda) - 12 \cdot 4(1+\lambda) + 9 = 64 + 48\lambda - 48 - 48\lambda + 9 = 25$ (σταθερό).

Άρα η παράσταση $A = (4x_1 - 3)(4x_2 - 3)$ είναι ανεξάρτητη του λ .

Δ3. (i) Για $\lambda = 1$ η ανίσωση γίνεται $x^2 - 4(1+1)x + 4 + 3 \cdot 1 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 < 0$ και με

διακρίνουσα $\Delta = 16\lambda^2 + 20\lambda \stackrel{\lambda=1}{=} 16 \cdot 1^2 + 20 \cdot 1 = 36$ και ρίζες $x_1 = \frac{8-6}{2} = 1$ και

$x_2 = \frac{8+6}{2} = 7$, το πρόσημο του $x^2 - 8x + 7$ είναι αυτό που φαίνεται στον πίνακα:

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$
$x^2 - 8x + 7$	+	○	-	+

Άρα $x^2 - 8x + 7 < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 7)$.

- (ii) Εφόσον $\frac{2026}{2025} > 1$, τότε $\frac{2026}{2025} \in (1, 7)$, δηλαδή ο αριθμός $\frac{2026}{2025}$ ανήκει στο σύνολο των x που κάνουν το τριώνυμο αρνητικό. Οπότε αντικαθιστώντας στο τριώνυμο όπου x το $\frac{2026}{2025}$, προκύπτει $A = \left(\frac{2026}{2025}\right)^2 - 8\left(\frac{2026}{2025}\right) + 7 < 0$.

